Ballistik

Lehre von der Bewegung und dem Verhalten von Geschossen

In der **Innenballistik** wird untersucht, wie sich Bogen und Geschoss in der Spannphase verhalten (Zugkräfte, Scherkräfte, Biegungen, etc.). Die **Abgangsballistik** untersucht das Verhalten des Geschosses und des Bogens während der Beschleunigung. Die **Außenballistik** befasst sich mit dem Geschoss im Flug, die **Endballistik** mit dem Auftreffen des Geschosses, d.h. mit der Verformung desselben, aber auch mit der Wirkung auf das getroffene Objekt.

Zunächst aber sollen einige physikalische Begriffe zur Verfügung gestellt werden.
Ein guter Teil wurde den beiden Büchern Geschosse Band 1 und Band 2 von Beat B. Kneubuehl entnommen,

Die Abkürzungen werden teils in Klammern, teils explizit erklärt.

Durchschnittsgeschwindigkeit: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ gemessene Wegstrecke durch verbrauchte Zeit.

Durchschnittsbeschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ Unterschied zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit durch verbrauchte Zeit. (t von tempus ist das Zeichen für Zeit).

s(Weg) = $v \cdot t$ v(Momentangeschwindigkeit) = $a \cdot t$ $s = ½ \cdot a \cdot t^2 = ½\, v \cdot t$

$t = \frac{2s}{v}$ $a = \frac{v^2}{2s}$ F(orce) = Kraft   m= Masse $F = m \cdot a$ (Kraft ist Masse mal Beschleunigung)

W(ork) = Arbeit $W = F \cdot x$ Kraft mal Weg E_{kin} = kinetische Energie = Energie der Bewegung

$E_{kin} = ½ \cdot m \cdot v^2$ (Einstein!)

E_{pot} = potentielle Energie = Energie der Lage $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ g(ravitiy) = Schwerkraft   h(öhe)

Trägheitsmoment $J = m \cdot r^2$ Drehimpuls $L = J \cdot \omega$ ω = Winkelgeschwindigkeit

T(orque) = Drehmoment $T = F \cdot r = J \cdot \alpha$ α = Winkelbeschleunigung

E_{rot} = Rotationsenergie $E_{rot} = ½\, J \cdot \omega$ Eine wichtige Kennzahl ist die Querschnittsbelastung q, die sich

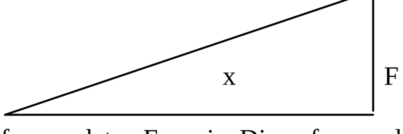
$q = \frac{m}{A}$ ergibt, wobei m die Masse, A der Querschnitt des Geschosses ist. Diese Kennzahl ist bei Pfeilgeschossen besonders hoch.

Innenballistik

Beim Bogen handelt es sich um eine „Federwaffe“, d.h. das Geschoss wird durch Federkraft beschleunigt. Beim Spannen einer Feder wird Arbeit verrichtet, d.h. Kraft längs eines Weges aufgewendet. Es wird „elastische“ Energie als potenzielle Energie gespeichert.

Als Federn können Blattfedern (Wurfarme), Schrauben- und Spiralfedern, Gummizüge wie bei Steinschleudern, aber auch Gase, die komprimiert werden, dienen.

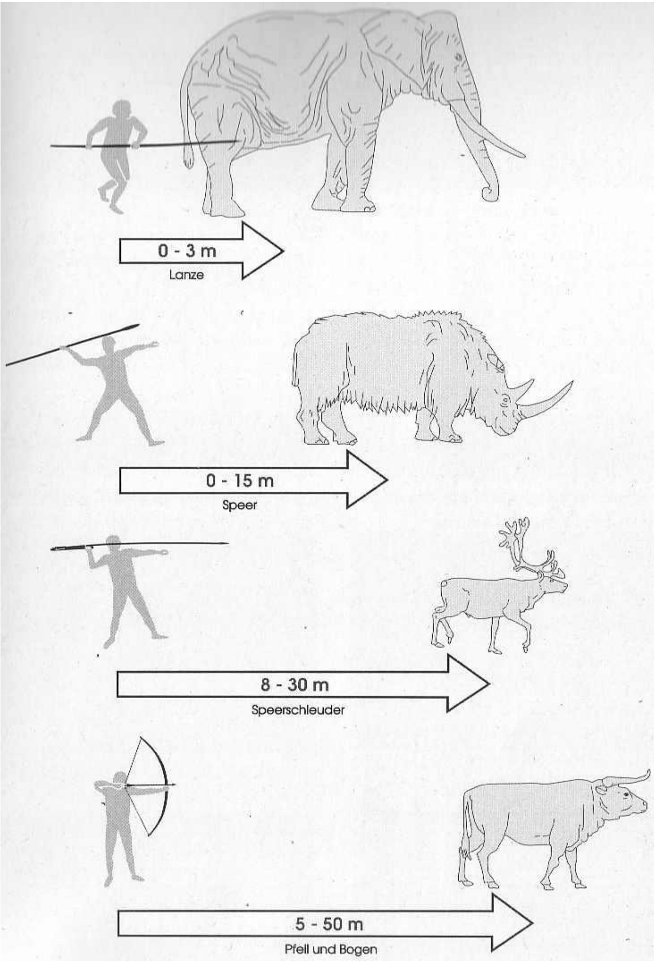
Eine lineare Feder zeigt die folgende Leistungskurve



Die Fläche des Dreiecks entspricht der zum Spannen aufgewendeten Energie. Die aufgewendete Kraft ergibt sich aus $F = D \cdot x$, wobei D die für die Bauart der Feder typische Zugkonstante, x der Spannweg ist. Vergleichen wir dies mit dem Zugkraftkurven – Diagramm aus der Biomechanik, dann sehen wir dort Kurven nichtlinearer Federn, wobei die Stacklinie einer linearen Feder entspricht. Dies heißt auch, dass ein Langbogen schlechter, ein Recurvebogen besser, der Compoundbogen wesentlich besser als eine gleich stark gespannte lineare Feder wirkt.

Der Recurvebogen speichert ca 26% , der Compoundbogen ca 36% mehr Energie als ein gleich starker Langbogen! Will man nur gleich viel Energie speichern wie im Langbogen, dann braucht man nur 80% der Zugkraft beim Recurve oder 75% der Zugkraft beim Compound.

Da die gespeicherte Energie auch zum Beschleunigen der Wurfarme und der Sehne verwendet wird, steht der Pfeil natürlich nicht der volle Betrag zur Verfügung. Die dafür bereitgestellte Energie bestimmt den Wirkungsgrad des Bogens. Kann man die Geschwindigkeit des Pfeils messen dann kann man dessen Energie leicht mit der Formel $E_{kin} = ½\ m \cdot v^2$ ausrechnen. Der Wirkungsgrad ergibt sich als Quotient $\eta = E_{kin}/E_{pot}$.



Der Wirkungsgrad steigt mit zunehmender Geschossmasse. Man merkt, dass ein Bogen ruhiger schießt, wenn man etwa von dünnen ACE-Pfeilen zu 2312-Hallenpfeilen wechselt, weil mehr Energie auf den Pfeil übertragen wird, und der Bogen daher weniger Vibrationsenergie erhält. Dies heißt, dass auch der Wirkungsgrad eines schweren Geschosses größer ist (panzerdurchschlagende schwere Langbogenpfeile!), aber die v_0 ist gering! Dies bedingt hohe Flugbahnen und lange Flugzeiten, vielleicht liegt das Ziel sogar außer Reichweite!

Es muss also je nach Problem eine spezielle Optimierung angestrebt werden. Will ich weit schießen, punktgenau treffen oder einen Elefanten jagen?

Die nebenstehende Grafik zeigt, welchen Fortschritt die Erfindung des Bogens für die Urmenschen bedeutete. Obwohl man mit einer Speeschleuder auch bis zu 300m werfen kann, sind natürlich der jagdlichen Verwendung viel engere Grenzen gesetzt.

Manche Forscher behaupten, dass durch den Bogen der Jäger von der Zusammenarbeit mit anderen Jagdgefährten unabhängig wurde und sich dadurch neue soziale Strukturen, ja vielleicht sogar die Familie im heutigen Sinne entwickelte.

Die Erfindung vergifteter Pfeile erhöhte die Wirkung dieser Waffe zusätzlich, sodass sogar Großtiere im Alleingang erlegt werden konnten. Allerdings war das zerlegen und der Abtransport eines Mammuts sicher nur in Teamarbeit möglich.

Abgangsballistik

Das Verhalten von Pfeil und Bogen während des Abschusses (Pfeilreflex, Bogenreaktionen) wird an anderer Stelle behandelt (siehe Tuning!)..

Außenballistik

Ein Spezialgebiet der Kinetik, die sich mit Beschleunigung, Geschwindigkeit, und der Bahn eines bewegten Objekts befasst.

Zur Außenballistik

Außenballistik wurde im militärischen Bereich intensiv bearbeitet, für den Pfeilflug gibt es wenig Literatur. Die Flugbahn eines Geschosses (ohne Eigenantrieb und Steuermechanismen) wird von folgenden Parametern festgelegt:

- Anfangsgeschwindigkeit
- Abschusswinkel
- Masse
- Form
- Drall
- Luftwiderstand
- Schwerkraft

Über Flugbahnen allgemein

Viele Anfänger wollen wissen, wie weit oder wie hoch sie schießen können. Das führt dazu, dass sie es einfach ausprobieren. Aber Achtung!
Auch Anfängerbögen schaffen Weiten von 200m!
Gefahr von Steilschüssen:

a) Man sieht den herunterkommenden Pfeil nicht
b) ein Schuss von 83 Grad geht so weit wie ein Schuss von 7 Grad. Sieben Grad bedeute aber die Überhöhung bei 90m. Das heißt, dass man auch bei einem solchen Steilschuss mit 90m Flugweite rechnen muss.

Damit man sich möglicherweise gefährliche Experimente erspart, sollen hier recht einfache Formeln für den reibungslosen (kein Luftwiderstand) Schuss oder Wurf gegeben werden.
Zunächst aber einige Geschwindigkeiten in Meter pro Sekunde:

Geworfener Stein 10 – 20 Pistolen- Revolverschuss 250 – 400
Gewehr 600 – 100
Schallgeschwindigkeit
In der Luft (15^0) 340 Im Wasser (20^0) 1483 In Stahl 5180

Bogen 40 – 90

Zunächst betrachten wir für den Wurf ohne *Schwerkraft* die Geradengleichung in Abhängigkeit von der Zeit (α = Abschusswinkel)

$\mathbf{x_t = t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha}$ Der y-Teil des Gleichungspaares (die vertikale Komponente) wird von der
$\mathbf{y_t = t \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}$ Schwerkraft beeinflusst, d.h. es muss die Formel für den freien Fall hinzugefügt werden.

Diese lautet: $\mathbf{h = {}^1/_2 \cdot G \cdot t^2}$ **Dabei ist G (9,81 m/s^2)**

Damit geht die sogenannte Parameterdarstellung der Flugbahn über in

$\mathbf{x_t = t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha}$

$\mathbf{y_t = t \cdot v_0 \cdot \sin\alpha - {}^1/_2 \cdot G \cdot t^2}$

Als wesentliche Schlussfolgerung ergibt sich, dass die Steig- und Fallzeit eines Körpers unabhängig von der horizontalen Geschwindigkeit bzw. horizontalen Reichweite ist. Die Flugzeit hängt nur von Steig- und Fallhöhe ab und kann mit der einfachen Formel für den freien Fall leicht bestimmt werden, wobei der steigende Teil und der fallende Teil der Flugbahn getrennt berechnet und anschließend die Zeiten addiert werden müssen.

$$t = \sqrt{\frac{2H}{G}}$$

Eliminiert man **t** aus dem obigen Gleichungspaar , so erhält man die geschlossene Form

$$y = x \cdot \tan\alpha - \frac{G \cdot x^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

Oder nur in Tangens:

$$y = x \cdot \tan\alpha - (1 + \tan\alpha) \cdot \frac{G \cdot x^2}{2 \cdot v^2}$$

Im Anschluss gebe ich einige Formeln an (alle unter Vernachlässigung der Luftreibung), die mit Hilfe eines Taschenrechners leicht angewandt werden können.

I Maximale horizontale Weite für vorgegebene v_0 und Winkel α

$Maxweite = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{G}$ Beispiel: v_0=55m/s $\alpha=10^0$ Maxweite= 105m

II Die maximale Höhe, die der Pfeil bei seinem Flug erreicht.

Zuerst muss die Flugzeit für die Maxweite errechnet werden: $t = \frac{Maxweite}{v \cdot \cos\alpha}$

Die Flugzeit für eine Strecke x kann auch geschätzt werden, wenn v_0 und die Geschwindigkeit am

Ende der Strecke bekannt ist. $t_x = \frac{2x}{v_0 + v_x}$

Die Maximale Höhe wird genau in der Mitte des Fluges erreicht:

$Maxhöhe = \frac{G \cdot t^2}{8}$ (Hauptsche Formel)

III Aus der Weite (horizontal) und v_0 soll der Abschusswinkel ermittelt werden:

a) $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arcsin(\frac{G \cdot Entfernung}{v^2})$ oder b) $\alpha = \arctan(\frac{G \cdot t^2}{2 \cdot Entfernung})$

IV Aus dem Abschusswinkel und der gewünschten (horizontalen) Entfernung soll die nötige Abschussgeschwindigkeit ermittelt werden. $v = \sqrt{\frac{Entfernung \cdot G}{\sin(2\alpha)}}$

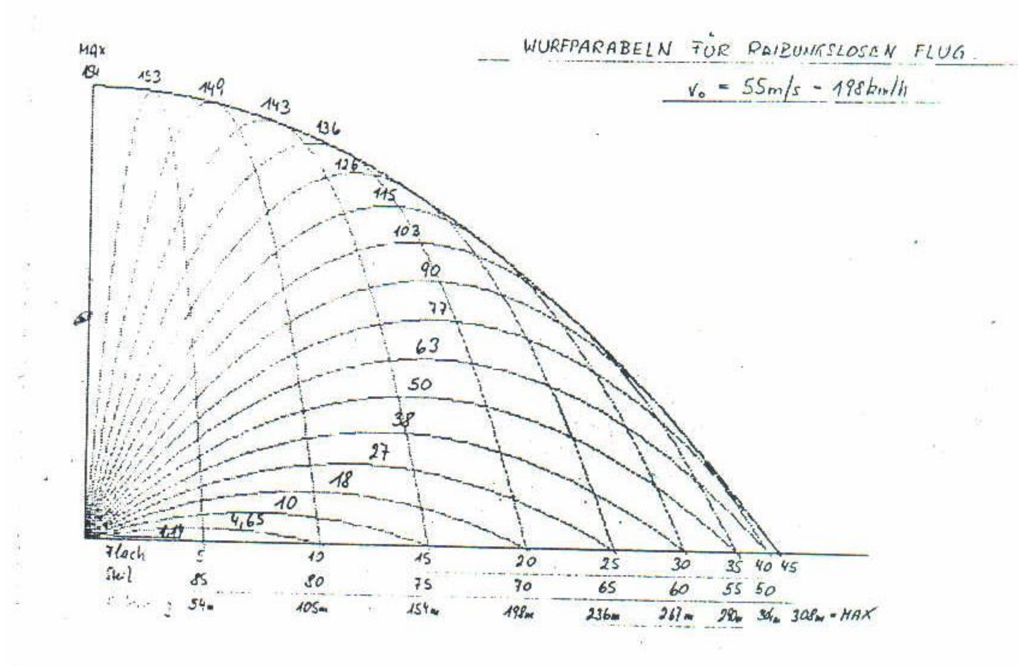
Ausschlaggebend für die Flugdauer ist ausschließlich der vertikale Teil der Flugbahn, d.h., die maximale Höhe über der Horizontalen gibt an, wie lange der Pfeil unterwegs ist. Die Zeit ist unabhängig von der Flugweite !

Am Beispiel des reibungslosen Pfeilflugs (Abschussgeschwindigkeit 55m/s) kann gezeigt werden, dass jene Flugbahnen, deren Abschusswinkel einander auf 90^0 ergänzen, die gleiche horizontale Distanz erreichen. Beim großen Winkel ist der Pfeil allerdings viel länger unterwegs.
Er ist somit länger dem Luftwiderstand ausgesetzt und wird daher nicht ganz die Weite erreichen, die ohne Luftwiderstand möglich wäre.

Zur Berechnung des Abbremsens durch den Luftwiderstand dient die folgende Formel:

$a = -c_w . \frac{\rho}{2} . v^2 . \frac{1}{q}$ c_w ist der formabhängige Luftwiderstandsbeiwert (wie bei Autos), ρ die Luftdichte, q die schon erwähnte Querschnittsbelastung. D. h. eine hohe v_0 ergibt auch eine hohe Abbremsung. Ein schweres Geschoss hat eine geringe Abbremsung, aber damit erreicht man keine hohe v_0! Während ein Gewehrgeschoss zwischen 0,5 und 1m/s Geschwindigkeit pro Meter Flugweg verliert, handelt es sich beim Pfeil nur um 0,1 – 0,2m/s ! Das sind auf 100m rund 5% der Anfangsgeschwindigkeit. Ein schwingender Bogenpfeil verliert mehr Geschwindigkeit als der kürzere stabil fliegende Armbrustpfeil!

Das unten stehende Diagramm zeigt alle Kurven zwischen 5^0 und 90^0 in 5^0-Schritten für



v_0 = 55m/s.

II Eine ähnliche Formel ergibt den höchsten Punkt (über Nockpunkt) einer Flugbahn.

Bemerkung zu dem Diagramm:

Zu der Menge aller möglichen Parabeln gibt es eine Hüllkurve, innerhalb derer sich das ganze Fluggeschehen abspielt.

Für alle , die gerne rechnen (Taschenrechner genügt):

I Formel dafür, wie weit der Pfeil fliegt, bis er wieder die Abschusshöhe erreicht. Vorgegeben wird der Abschusswinkel und v_0.

$$Maxweite = \frac{v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{G}$$ Ist $\alpha = 10^0$ und v_0 =55m/s dann ergeben sich 105m.

Da in dieser Formel Winkel, die einander auf 90^0 ergänzen, den gleichen Sinus ergeben, erhält man die selbe Weite auch mit einem 80^0-Schuß.

$$Maxhöhe = \frac{v^2 \times \sin^2(2\alpha)}{2G}$$ Konkret für unseren 105m-Schuß 4,65m über Nockpunkt.

Dazu eine einfache Faustregel:

Die Höhe bei senkrechtem Schuss entspricht der halben Weite bei einem 45 Grad Schuss. **III**

Die überhaupt erreichbare Maximalweite bzw. Maximalhöhe lassen sich wie folgt berechnen:

$$W = \frac{v^2}{G} \qquad H = \frac{v^2}{2G}$$ d.h., man kann halb so hoch wie weit schießen.

Konkret: v=70m/s (entspricht 252km/h): W = 500m H = 250m

IV Will man wissen, mit welcher Geschwindigkeit man auf ein Ziel in Nockpunkthöhe bei gegeben Winkel schießen muss, dann gilt:.

$v = \sqrt{\frac{Weite \times G}{\sin(2\alpha)}}$ Für $\alpha = 7_0$, W = 90m : v = 60m/s

V Welcher Winkel gehört zu vorgegebener v_0 und Weite ?

$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{G \cdot Enfernung}{v^2})$ oder zu v_0 und t: $\alpha = \arctan(\frac{G \cdot t^2}{2 \cdot Entfernung})$

Bsp.: v = 60m/s, W = 120m $\alpha = 9{,}54^0$

VI Der Abschusswinkel und die Entfernung sind vorgegeben. Mit welcher v_0 ist zu schießen?

$v = \sqrt{\frac{W \cdot G}{\sin(2\alpha)}}$ Bsp.: W= 120 $\alpha = 7^0$ v = 69,75m/s

VII Unter welchem Winkel muss man auf ein Ziel schießen, das waagrecht d und horizontal h entfernt ist ?

d kann auch - wenn e die direkte Entfernung ist – ersetzt werden durch $d = \sqrt{e^2 - h^2}$

$\tan\alpha_{1,2} = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - G(2v^2h + Gd^{2)}}}{Gd}$

VIII Aus der Geschwindigkeit eines Pfeiltyps kann man die Geschwindigkeit aller anderen Pfeiltypen

ermitteln, wenn man auch deren Masse kennt.

Setzt man in die Energieformel $e = \frac{m.v^2}{2}$ die Masse des Pfeils ein (Gewicht in kg) und die Geschwindigkeit in m/s, dann erhält man die auf den Pfeil übertragene Energie.

Beispiel:. ACE-Pfeil m =0,0187kg v_0 = 269 ft/s x1,1 ==>296km/h : 3,6 ==> 82,2m/s

e= 0,0187.82,2 ²/2=**63** J(oule) Dreht man die Formel nach v um, so erhält man: $v = \sqrt{\frac{2e}{m}}$

Setzt man nun für m die Masse eines anderen Pfeils ein, z. Bsp. ACC, für e den errechneten Wert (ändert sich ja nicht), dann erhält man die v_0 des neuen Pfeils. Also: ACC 0,0236kg 00 ==>v = 73m/s . Und dieser Wert stimmt ganz genau mit der Messung überein!!

Einige Flugdaten (ohne Berücksichtigung der Reibung) für einen Schuss über 90m:

v_0 in km/h	v_0 in m/s	Abschusswinkel	Höhe über Horizontale	Flugzeit
300	83,33	$3{,}68^0$	1,24	1,086 s
250	70	$5{,}19^0$	2,07	1,3 s
200	55	$8{,}49^0$	3,35	1,65 s
150	42	15^0 !!!	6,5	2,21

Visierüberhöhung (zu messen von der Waagrechten abwärt) in cm bei 1m Abstand vom Auge

1^0	1,745cm	$5{,}19^0$	9,1cm
2^0	3,49cm	$8{,}49^0$	14,9cm
3^0	5,24cm	15^0	26,79cm !!!
$3{,}68^0$	6,43cm		

Nullwinkel des Bogens ermitteln

Aus 2m Entfernung auf einen Punkt in Aughöhe zielen und einen Punkt treffen, der im Auge-Pfeilschaftabstand unterhalb des Zielpunktes liegt. Die Marke für diese Einstellung liegt oberhalb der höchsten Visiermarke und dient auch als Ausgangspunkt für die Visierüberhöhung, wobei allerdings ein anderer Auge-Visierabstand proportional umgerechnet werden muss.